Logika

Materiały do wykładu Komputerowe Przetwarzanie Wiedzy

Tomasz Kubik

Kontekst

- Sylogistyka
  - Rachunek nazw
    - k**a**żde … jest …, żadn**e** … nie jest …, n**i**ektóre … są …, niekt**ó**re … nie są …
- Logika matematyczna
  - Każde zdanie, które można udowodnić jest prawdziwe.
  - Jeżeli pewne zdanie jest prawdziwe, to istnieje jego dowód (być może jeszcze nieznany).
- Logika w informatyce
  - Matematyczne podstawy oprogramowania
    - badanie własności języków programowania
    - badanie oprogramowania
    - badanie własności metodologii tworzenia oprogramowania
    - specyfikację poszczególnych produktów tworzonych w kolejnych etapach tworzenia oprogramowania
    - programowanie

Kontekst

- Rachunek zdań
  - Dział logiki matematycznej badający związki między zdaniami (zmiennymi zdaniowymi) lub funkcjami zdaniowymi utworzonymi za pomocą spójników zdaniowych ze zdań lub funkcji zdaniowych prostszych.
  - Określa sposoby stosowania spójników zdaniowych w poprawnym wnioskowaniu.
  - Każdemu zdaniu można przypisać jedną z dwu wartości logicznych - prawdę albo fałsz
- Rachunek predykatów
  - Stworzony poprzez rozszerzenie rachunku zdań o kwantyfikatory ogólny i szczególny: „dla każdego” $\forall$ oraz „istnieje takie, że” $\exists$.
  - Predykat (lub funkcja zdaniowa) to wyrażenie W(x), w którym występuje zmienna x i które staje się zdaniem prawdziwym lub fałszywym, gdy w miejsce zmiennej x wstawiona zostanie jej wartość
  - Predykat składa się z nazwy i dowolnej liczby argumentów, którymi mogą być stałe i zmienne indywiduowe, litery funkcyjne oraz inne predykaty.

Systemy dowodzenia w rachunku zdań

- Twierdzenia teorii **T**(**U**) to logiczne konsekwencje zbioru aksjomatów **U**.
  - **U** |= A (formuła A jest konsekwencją zbioru aksjomatów **U**) wtedy i tylko wtedy, gdy |=A1^... ^ An→A, gdzie **U** = {A1, ..., An} jest zbiorem aksjomatów.
  - **U** |= A gdy procedura decyzyjna rozwiązująca problem prawdziwości formuł udzieli dla formuły A odpowiedzi „TAK”.

↓ binegacja *Ani Kowalski nie jest lekarzem, ani Malinowski nie jest lekarzem*.

↑dysjunkcja *Kowalski jest lekarzem bądź Malinowski jest lekarzem*

⊕ alternatywa rozłączna *Kowalski jest lekarzem albo Malinowski jest lekarzem*

Metoda tabel semantycznych

- Służy do badania spełnialności formuł rachunku zdań
- Jest procedurą decyzyjną, polegającą na
  - rozwijaniu badanej formuły w drzewo, którego liście zawierają zbiory literałów
  - ocenie otrzymanego rozwiązania
    - Liść zawierający literały komplementarne oznaczany jest przez $\times$ (domknięty),
    - Liść zawierający zbiór literałów spełnialnych oznaczany jest przez $\odot$ (otwarty).
- Rozwijanie w drzewo odbywa się zgodnie z regułami typu α i typu β

- Tabelę semantyczną, której tworzenie zakończono nazywamy zakończoną
  - domkniętą, jeśli wszystkie liście są oznakowane jako domknięte.
  - otwartą, jeżeli istnieje liść oznakowany jako otwarty
- Algorytm tworzenia tabeli semantycznej zatrzymuje się
- Tworzenie tabel semantycznych nie jest jednoznaczne

Reguły tablic semantycznych

α	$\alpha 1$	$\alpha 2$
$\neg\neg A$	A	
$A1 \wedge A2$	$A1$	$A2$
$\neg(A1 \vee A2)$	$\neg A1$	$\neg A2$
$\neg(A1 \rightarrow A2)$	$A1$	$\neg A2$
$\neg(A1 \uparrow A2)$	$A1$	$A2$
$A1 \downarrow A2$	$\neg A1$	$\neg A2$
$A1 \leftrightarrow A2$	$A1 \rightarrow A2$	$A2 \rightarrow A1$
$\neg(A1 \oplus A2)$	$A1 \rightarrow A2$	$A2 \rightarrow A1$

β	$\beta 1$	$\beta 2$
$\neg(B1 \wedge B2)$	$\neg B1$	$\neg B2$
$B1 \vee B2$	$B1$	$B2$
$B1 \rightarrow B2$	$\neg B1$	$B2$
$B1 \uparrow B2$	$\neg B1$	$\neg B2$
$\neg(B1 \downarrow B2)$	$B1$	$B2$
$\neg(B1 \leftrightarrow B2)$	$\neg(B1 \rightarrow B2)$	$\neg(B2 \rightarrow B1)$
$B1 \oplus B2$	$\neg(B1 \rightarrow B2)$	$\neg(B2 \rightarrow B1)$

Algorytm

- Jeżeli U(*l*) (zbiór formuł w wierzchołku *l*) jest zbiorem literałów, to sprawdź, czy zawiera on parę literałów komplementarnych. Jeżeli tak, to oznakuj go jako domknięty $\times$, jeżeli nie, to oznakuj go jako otwarty $\odot$.
- Jeżeli U(*l*) nie jest zbiorem literałów, to wybierz dowolną formułę z tego zbioru, niebędącą literałem.
  - Jeżeli formuła jest typu α, to utwórz nowy wierzchołek *l'* jako potomka wierzchołka *l* i umieść w nim zbiór formuł:

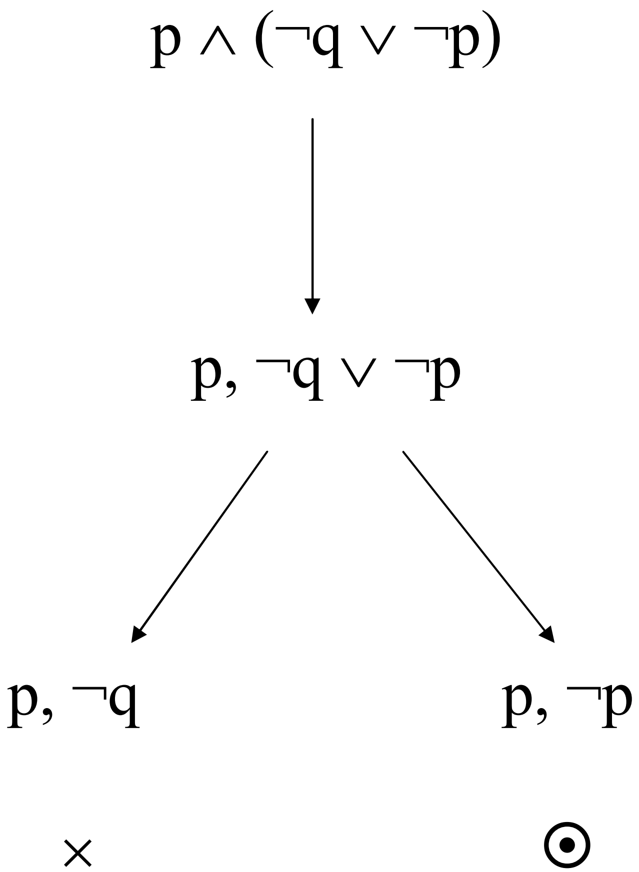
    $$U(l')=(U(l) - \{\alpha\}) \cup \{\alpha 1, \alpha 2\}$$

    (z wyjątkiem ¬ ¬ A, dla której nie ma formuły α2).
  - Jeżeli formuła jest typu β, to utwórz dwa nowe wierzchołki *l' i l"* jako następniki wierzchołka *l' .* W wierzchołku *l'* umieść zbiór formuł:

    $$U(l')=(U(l) - \{\beta\}) \cup \{\beta 1\}$$
  - a w wierzchołku *l"* zbiór:

    $$U(l')=(U(l) - \{\beta\}) \cup \{\beta 2\}$$
- Formuła A jest niespełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy zakończona tabela **T** dla formuły A jest domknięta.
- Formuła A jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy **T** jest otwarta.
- Formuła A jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy tabela semantyczna dla formuły ¬A jest domknięta.

Przykład dowodu



$A1 \wedge A2$	$A1$	$A2$

$B1 \vee B2$	$B1$	$B2$

Problemy w stosowaniu tablic semantycznych

- Zbiór aksjomatów może być nieskończony
  - np. $(x=y) \rightarrow (x+1=y+1)$ (arytmetyka)
- Dla nielicznych systemów logicznych istnieją procedury decyzyjne takie, jak dla rachunku zdań.
- Procedura decyzyjna może nie dawać wglądu w związki między aksjomatami i twierdzeniem.
- Procedura decyzyjna daje tylko odpowiedzi „TAK” i „NIE”, czyli nie możemy poznać wyników pośrednich (lematów).

Systemy dowodzenia

- Składają się ze zbiorów: aksjomatów i reguł dowodzenia
- Reguły dowodzenia służą do wyprowadzanie nowych formuł ze zbioru aksjomatów
- Wyprowadzeniem (dowodem) nazywany jest ciąg zbiorów formuł takich, że każda formuła należąca do jednego z tych zbiorów jest aksjomatem lub może być wyprowadzona z poprzednich formuł w ciągu przy użyciu pewnej reguły dowodzenia
- Jeśli ostatnim elementem ciągu jest {A}, to A nazywamy twierdzeniem, a ciąg zbiorów formuł nazywamy dowodem formuły A
- Zapis |-A oznacza, że A jest wyprowadzalne
- Liczba aksjomatów może być nieskończona
- Każdy dowód składa się ze skończonego zbioru formuł
- Łatwo sprawdzić poprawność na podstawie składni formuł
- Z dowodu wynika jakich aksjomatów, twierdzeń oraz reguł użyto i w jakim kroku
- Wzorzec dowodu można przenieść na podobne dowody
- Udowodnione twierdzenie może być wykorzystane w kolejnych dowodach

Problemy w stosowaniu systemów dowodzenia

- Nie ma przepisu na dowód
- Przeprowadzenie dowodu wymaga pomysłowości, a nie „siłowego”, systematycznego przeszukiwania
- Można wykorzystać heurystyki

System gentzenowski **G**

- **Gerhard Gentzen** (24 listopada 1909 - 4 sierpnia 1945) - niemiecki matematyk, zasłużony w badaniach nad logiką i podstawami matematyki. Miał duży wpływ na powstanie systemów dowodzenia twierdzeń, tworząc między innymi system sekwentów.
- Po zajęciu Pragi przez wojska radzieckie został aresztowany razem z pozostałymi profesorami niemieckiego uniwersytetu i po trzech miesiącach przebywania w tragicznych warunkach zmarł.

- Aksjomatami są zbiory formuł zawierające pary literałów komplementarnych.

- Reguły dowodzenia są następujące:

$$\frac{\vdash U_1 \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}}{\vdash U_1 \cup \{\alpha\}} \qquad \frac{\vdash U_1 \cup \{\beta_1\} \quad \vdash U_2 \cup \{\beta_2\}}{\vdash U_1 \cup U_2 \cup \{\beta\}}$$

Reguły systemu gentzenowskiego

α	$\alpha 1$	$\alpha 2$
$\neg(A1 \wedge A2)$	$\neg A1$	$\neg A2$
$A1 \vee A2$	$A1$	$A2$
$A1 \rightarrow A2$	$\neg A1$	$A2$
$A1 \uparrow A2$	$\neg A1$	$\neg A2$
$\neg(A1 \downarrow A2)$	$A1$	$A2$
$\neg(A1 \leftrightarrow A2)$	$\neg(A1 \rightarrow A2)$	$\neg(A2 \rightarrow A1)$
$A1 \oplus A2$	$\neg(A1 \rightarrow A2)$	$\neg(A2 \rightarrow A1)$

β	$\beta 1$	$\beta 2$
$\neg\neg B$	B	
$B1 \wedge B2$	$B1$	$B2$
$\neg(B1 \vee B2)$	$\neg B1$	$\neg B2$
$\neg(B1 \rightarrow B2)$	$B1$	$\neg B2$
$\neg(B1 \uparrow B2)$	$B1$	$B2$
$B1 \downarrow B2$	$\neg B1$	$\neg B2$
$B1 \leftrightarrow B2$	$B1 \rightarrow B2$	$B2 \rightarrow B1$
$\neg(B1 \oplus B2)$	$B1 \rightarrow B2$	$B2 \rightarrow B1$

Przykład dowodu w systemie genzenowskim

|- $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$

$$
\begin{tikzcd}
\neg p, q, p \arrow[dr] & & \neg q, p, q \arrow[dl] \\
& \neg(p \vee q), q, p \arrow[d] & \\
& \neg(p \vee q), (q \vee p) \arrow[d] & \\
& \neg(p \vee q) \rightarrow (q \vee p) &
\end{tikzcd}
$$

1. |- $\neg p, q, p$ aksjomat
2. |- $\neg q, p, q$ aksjomat
3. |- $\neg(p \vee q), q, p$ — $\beta \vee : 1, 2$
4. |- $\neg(p \vee q), (q \vee p)$ — $\alpha \vee : 3$
5. |- $\neg(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$ — $\alpha \rightarrow : 4$

$\neg$(B1 $\vee$ B2)	$\neg$B1	$\neg$B2
A1 $\vee$ A2)	A1	A2
A1 $\rightarrow$ A2	$\neg$A1	A2

Powiązanie systemu genzenowskiego z tablicami semantycznymi

- Niech U będzie dowolnym zbiorem formuł, a U' zbiorem dopełnień formuł ze zbioru U. Wówczas |-U wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje domknięta tabela semantyczna dla U'.
- W systemie gentzenowskim |-A wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje domknięta tabela semantyczna dla ¬A.
- |=A wtedy i tylko wtedy, gdy |- A w systemie **G**.

System hilbertowski H

- Na system H składają się trzy schematy aksjomatów
  - Aksjomat 1: $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow A))$
  - Aksjomat 2: $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
  - Aksjomat 3: $\vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B))$

    gdzie A, B, C to dowolne formuły oraz
  - jedna reguła dowodzenia (nazywana regułą modus ponens):

$$\frac{\vdash A \qquad \vdash A \rightarrow B}{\vdash B}$$

Dowód twierdzenia w systemie hilbertowskim

$$\vdash (A \to A)$$

Dowód:

Aksjomat 2 $\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

$A \quad A \to A \quad A$

$$\vdash (A \to (A \to A \to C)) \to ((A \to A \to A) \to (A \to C))$$

$$\vdash (A \to (A \to A \to A)) \to ((A \to A \to A) \to (A \to A))$$

Aksjomat 1 $\vdash (A \to (B \to A))$

$A \quad A \to A$

$$\vdash (A \to (A \to A \to A))$$

Dowód:

A2 $\vdash (A \to (A \to A \to A)) \to ((A \to A \to A) \to (A \to A))$

A1 $\vdash (A \to (A \to A \to A))$

Modus ponens $((A \to A \to A) \to (A \to A))$

MP $\vdash ((A \to A \to A) \to (A \to A))$

A1 $\vdash (A \to (A \to A))$

Modus ponens $(A \to A)$