Co powiedział James F. Allen na temat interwałów i jakie są tego skutki

Tomasz Kubik

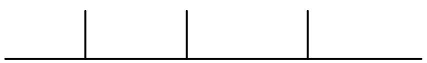
Wiadomości podstawowe

- Istnieje wiele możliwości modelowania czasu, obowiązuje jednak zasada:
  „różne zadania wymagają różnych modeli.”
- Obiekty temporalne:
  - Zdarzenia, procesy, stany
  - Punkty, rozpoczynające i kończące jakieś zdarzenia
  - Interwały, przedziały czasu, w których zachodzą jakieś zdarzenia bądź prawdziwe są jakieś twierdzenia
- Dziedzina:
  - Czas dyskretny lub ciągły
  - Czas wyrażany bezwzględnie lub względnie
  - Różne rozmiary ziarna czasu (najmniejszej jednostki czasu)
  - Model czasu liniowy, równoległy lub rozgałęziony
- Podejście jakościowe (Qualitative Temporal Networks)
  - Algebra punktu, algebra interwału
- Podejście ilościowe (Quantitative Temporal Networks)
  - Simple Temporal Problem
  - General TCSP
  - Path consistency in quantitative networks
  - Network-based algorithms

Punkty, przedziały, czas dyskretny i ciągły

- Punkty czasu:
  - zdarzenie E występuje w chwili T_i.
  - własność P zachodzi w chwili T_i.
- Przedziały czasu:
  - zdarzenie E dzieje się w przedziale czasu (T_i,T_j).
  - własność P zachodzi (istnieje) w przedziale czasu (T_i,T_j).
- Czas dyskretny
  - kroki w czasie, następny/poprzedni punkt czasu
  - jak liczby całkowite
  - t1 t2 t3 t4

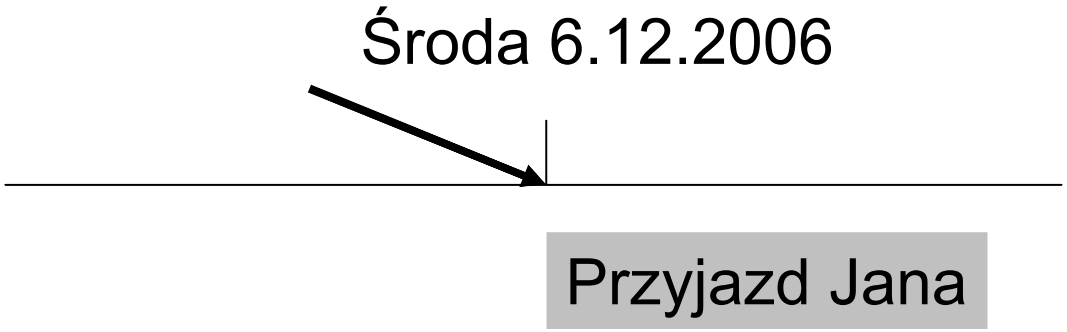
- Czas ciągły
  - miejsca pomiędzy dwoma punktami w czasie
  - jak liczby rzeczywiste
  - t0 t0.5 t1



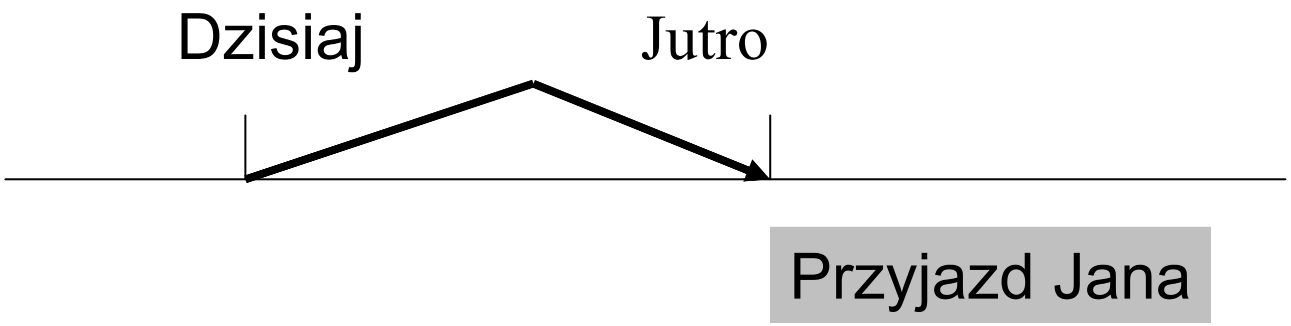
Opis absolutny i względny

Przykład:

Jan przyjedzie w środę, 21-ego.



Jan przyjedzie jutro.



Rozmiar ziarna czasu

- Rozróżnienie punktów i przedziałów czasu to nie to samo co rozróżnienie przypadku ciągłego i dyskretnego.

- Rozmiar ziarna dotyczy przypadku dyskretnego, gdzie mamy:
  - rok, miesiąc, dzień, godzina, minuta, sekunda, …

- Wybór ziarna wpływa na:
  - dokładność i precyzję
  - koszt (składowanie, wydajność)

- Czasem używa się reprezentacji hierarchicznej, z różną rozdzielczością dla różnych poziomów

Reprezentacja ilościowa oraz jakościowa

- Używa się zarówno dla przypadku ciągłego, jak i dyskretnego

  - Reprezentacja jakościowa:
    - punkty czasu są uporządkowane: $T_k > T_0$
    - właściwości wyrażane są względnie: $|T_k - T_0| < |T_x - T_y|$

  - Reprezentacja ilościowa:
    - wymiar absolutny: $T_k = 1.5$, $T_0 = 0$
    - właściwości absolutne: $|T_k - T_0| = 1.5$

Jakościowa reprezentacja i wnioskowanie temporalne: motywacja

- Często nie chcemy (lub też nie możemy) mówić o dokładnym czasie
  - LP: nie potrafimy określić precyzyjnie punktów w czasie
  - Planowanie: nie chcemy dopuścić do osiągnięcia punktów czasu zbyt wcześnie
  - Opisy scenariusza: nie mamy dokładnego czasu lub nie chcemy go wyrażać jawnie

- Jak jest reprezentowana taka informacja?
  - Punkty czasu: akcje lub zdarzenia są natychmiastowe, lub rozważane są chwile ich rozpoczęcie i zakończenie
  - Przedziały czasu: wszystkie akcje i zdarzenia trwają jakiś czas

Algebra interwału Allen'a (James F. Allen [1983])

- Algebra interwału Allen'a definiuje przedziały czasu oraz binarne relacje na nich

- Przedziały czasu
  - $X = (X^{-}, X^{+})$, gdzie dziedziny X^{-} i X^{+} są liczbami rzeczywistymi, oraz $X^{-} < X^{+}$

- Relacje pomiędzy przedziałami
  - (1.0,2.0) przed (before) (3.0,5.3)
  - (1.0,3.0) spotyka (meets) (3.0,5.3)
  - (1.0,4.0) pokrywa (overlaps) (3.0,5.3)

- Które relacje są poprawne?

Relacje podstawowe

- Na ile sposobów można uszeregować cztery punkty dwóch przedziałów?

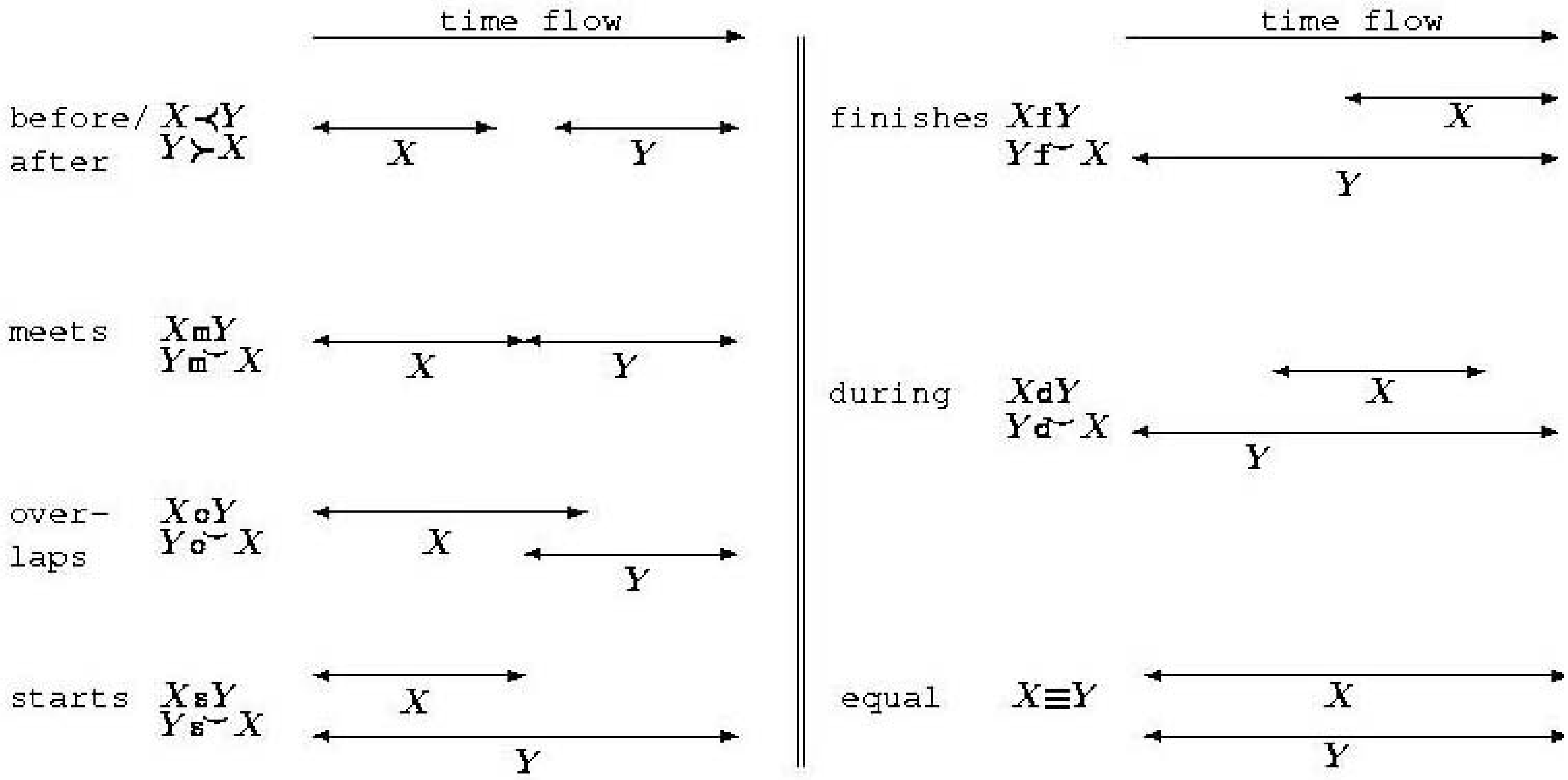
Zbiór	Relacja	nazwa
$\{(X,Y) \mid X^- < X^+ < Y^- < Y^+\}$	$<$	**before**
$\{(X,Y) \mid X^- < X^+ = Y^- < Y^+\}$	m	**meets**
$\{(X,Y) \mid X^- < Y^- < X^+ < Y^+\}$	o	**overlaps**
$\{(X,Y) \mid X^- = Y^- < X^+ < Y^+\}$	s	**starts**
$\{(X,Y) \mid Y^- < X^- < X^+ = Y^+\}$	f	**finishes**
$\{(X,Y) \mid Y^- < X^- < X^+ < Y^+\}$	d	**during**
$\{(X,Y) \mid Y^- = X^- < X^+ = Y^+\}$	=	**equal**

Zamieniając X i Y otrzymamy relacje odwrotne:

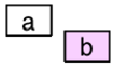
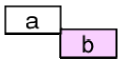
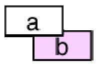
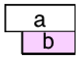
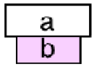
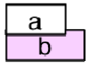
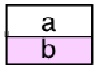
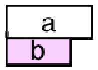
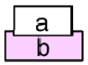
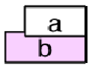
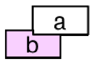
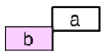
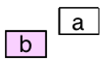
$>$,mi,oi,si,fi,di,e

Relacje te są parami rozłączne

13 Relacji podstawowych wyrażonych graficznie



Algebra Interwału Allen'a

	Alspaugh		Allen		Krokhin et al.	
	precedes	p	before	<	precedes	p
	meets	m	meets	m	meets	m
	overlaps	o	overlaps	o	overlaps	o
	finished-by	F	finished-by	fi	finished-by	f^{-1}
	contains	d	contains	di	contains	d^{-1}
	starts	s	starts	s	starts	s
	equals	e	equals	=	equals	≡
	started-by	s	started-by	si	started-by	s^{-1}
	during	d	during	d	during	d
	finishes	f	finishes	f	finishes	f
	overlapped-by	O	overlapped-by	oi	overlapped-by	o^{-1}
	met-by	M	met-by	mi	met-by	m^{-1}
	preceded-by	P	after	>	preceded-by	p^{-1}

Algebra Interwału

- Zmienne: dwa interwały X, Y reprezentujące dwa zdarzenia
- Istnieje 13 podstawowych relacji pomiędzy interwałami

  r = { p, m, o, s, d, f, P, M, O, S, D, F, e }
- Możemy mieć „nieprecyzyjną" informację o relacji pomiędzy X i Y, tzn. wyrażenie:

  $(X\ o\ Y) \vee (X\ m\ Y)$
- Klauzule dysjunktywne z wyróżnionymi atomowymi relacjami pomiędzy zmiennymi mają równoważny opis za pomocą zbioru relacji

  $(X\ r_1\ Y) \vee (X\ r_2\ Y) \vee \ldots \vee (X\ r_k\ Y) \Leftrightarrow X \{ r_1, r_2, \ldots, r_k \} Y$

  na przykład:

  X {o,m} Y (inny zapis: X (om) Y)
- Stąd mamy 2^{13} (tj. 8192) relacji „nieprecyzyjnych"
- Przykład jakościowego opisu temporalnego:

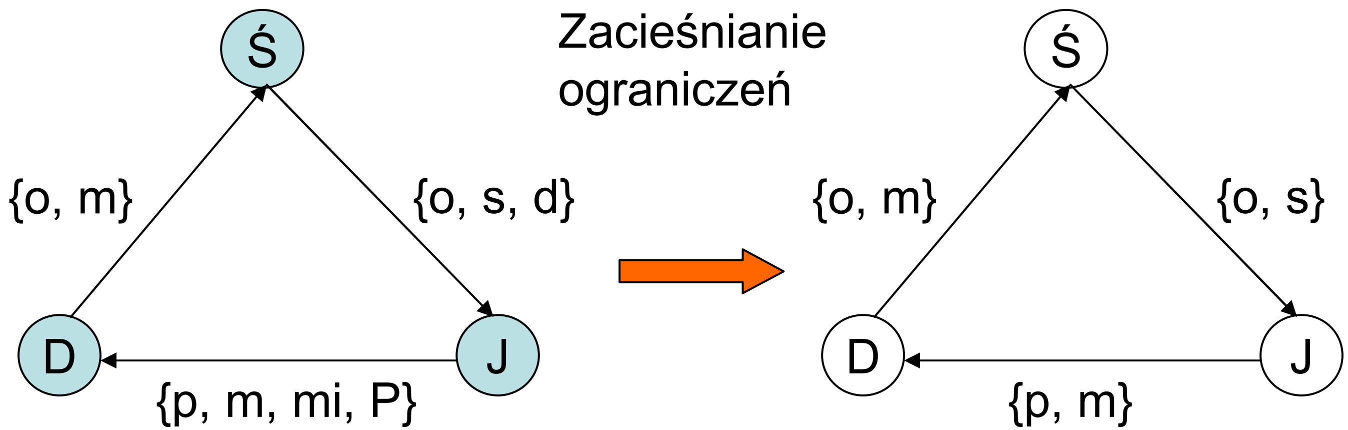
  X {o,m} Y, Y {m} Z, X {o,m} Z

- W ogólności pełna relacja { p, m, o, s, d, f, P, M, O, S, D, F, e } zachodzi pomiędzy interwałami, o których nic nie wiadomo. Pusta relacja {} nie ma interpretacji w terminach wzajemnej relacji dwóch interwałów, jednak może być wynikiem pewnych operacji na relacjach interwałów i jest potrzebna dla podalgebr algebry interwału Allen'a.

Przykład [Allen1983].

„Jana nie było w pokoju kiedy dotknąłem przełącznika, aby zapalić światło, ale za to był w pokoju później, kiedy już paliło się światło”

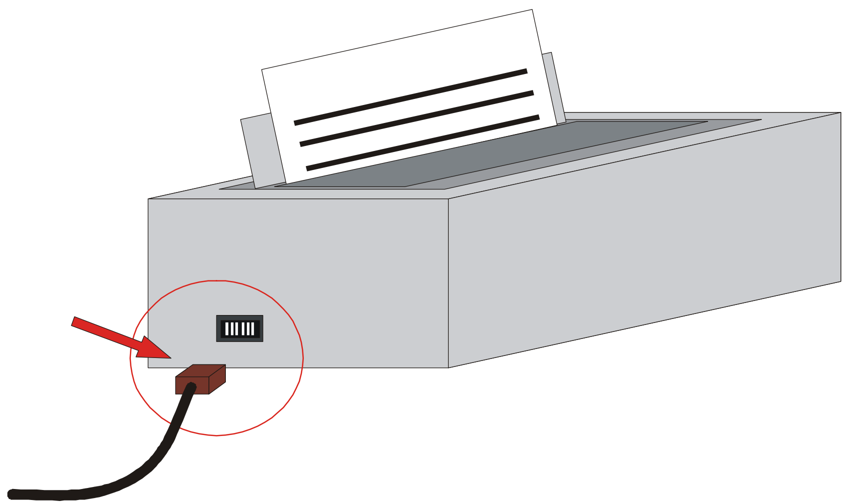
- Zdefiniujmy interwały:
  - J – Jan był w pokoju
  - D – Dotknąłem przełącznika światła
  - Ś – Światło było zapalone
- Ograniczenia:
  - D {o, m} Ś
  - D {p, m, M, P} J
  - Ś {o, s, d} J



- Minimalna sieć:
  - jednoznaczna sieć równoważna sieci oryginalnej
  - wszystkie ograniczenia są podzbiorem oryginalnych ograniczeń
  - dostarcza reprezentacji bardziej wprost
  - użyteczna w odpowiadaniu wielu rodzajów pytań

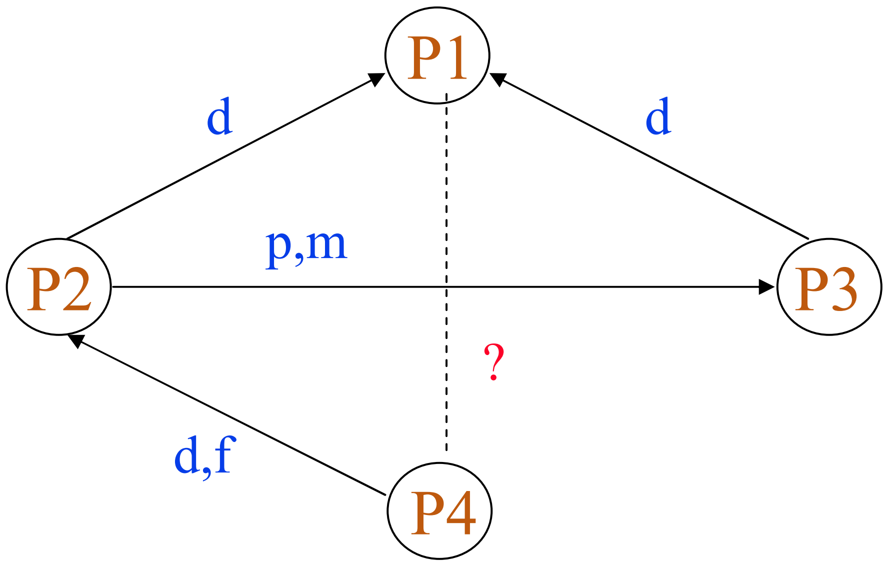
Przykład „inteligentnego” doradcy

- Rozważmy scenariusz działania „inteligentnego” doradcy:
  - P1: wyświetl rysunek 1
  - P2: powiedz „podłącz wtyczkę”
  - P3: powiedz „wtyczka pewnie jest wyłączona”
  - P4: wskaż na właściwą wtyczkę na rysunku



Przykład „inteligentnego” doradcy

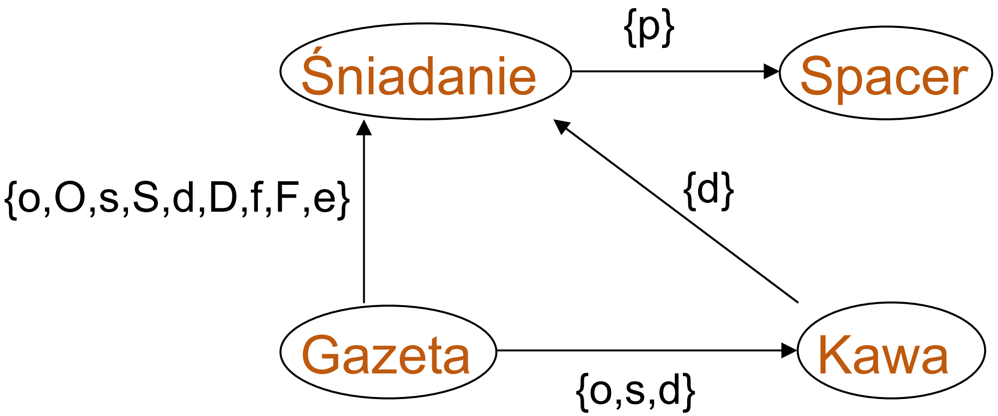
- Relacje temporalne pomiędzy zdarzeniami:
  - P2 powinno zajść w czasie P1
  - P3 powinno zajść w czasie P1
  - P2 powinno poprzedzać lub zajść bezpośrednio przed P3
  - P4 powinno zajść w czasie trwania lub skończyć się razem z P2



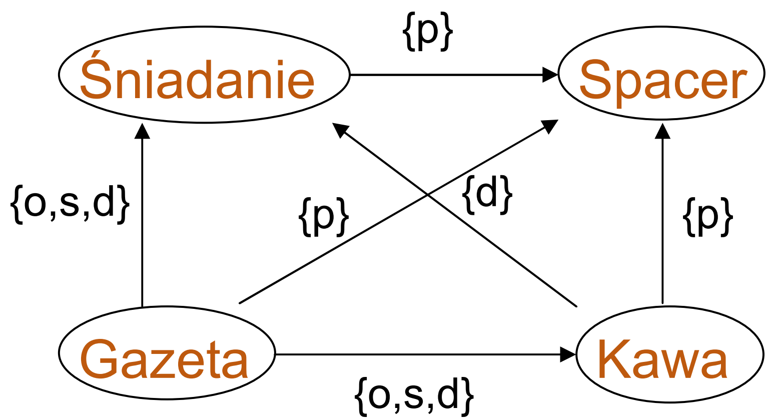
Czy zachodzi P4{d}P1 ?

Przykład

- Fred czytał gazetę w trakcie jedzenia śniadania. Odłożył gazetę i wypił ostatnią kawę. Po śniadaniu wyszedł na spacer.



możliwe relacje



realizowalne relacje

Spójny scenariusz

Operacje na relacjach algebry interwałów

- **Dopełnienie:**
  - dopełnienie ~*r* relacji *r* jest relacją składającą się ze wszystkich relacji podstawowych nie występujących w *r*, stąd dla każdej relacji *r* mamy ~(~*r*) = *r*.
  - przykłady:

~(p) = (moFDseSdfOMP)   ~(pmoFD) = (seSdfOMP)   ~() = (pmoFDseSdfOMP)

- **Złożenie (composition):**
  - Złożeniem (*r.s*) dwóch relacji (*r*) i (*s*) jest relacja, która zachodzi pomiędzy *X* i *Z*, jeśli istnieje takie *Y*, że *X*(*r*)*Y* oraz *Y*(*s*)*Z*. Zapisujemy wtedy *X*(*r.s*)*Z*. Obliczanie złożenia nie jest łatwe. Złożenie można określić wracając do początkowych definicji relacji albo dokonując kompozycji każdej podstawowej relacji z *r* z każdą podstawową relacją z *s*, i biorąc część wspólną wyników. Złożenie nie jest przemienne, ale jest lewo i prawo stronnie łączne (associative), oraz rozdzielne względem sumy (union)

$$R \circ R' = R'' = \{r'' \mid r'' \in R \vee r'' \in R'\}$$

  - przykłady:

(m).(m) = (p)   (pm).(pm) = (p)   (oFD).(oFDseS) = (pmoFD)

Operacje na relacjach algebry interwałów

- **Odwrotność:**
  - Odwrotność *!r* relacji *r* jest relacją składającą się z odwrotności wszystkich podstawowych relacji w *r*. Stąd dla każdej relacji *r* mamy !(!*r*) = *r*.
  - przykłady: !(p) = (P) !(pmoFD) = (dfOMP) !(mM) = (mM) !() = ()

- **Przecięcie:**
  - Przecięcie (*r*^*s*) dwóch relacji (*r*) i (*s*) jest częścią wspólna zbiorów dwóch relacji; jest relacją składającą się ze wszystkich podstawowych relacji zawartych zarówno w (*r*) jak i w (*s*). Przecięcie jest przemienne i łączne.
  - przykłady: (pmo)^(FDseS) = () (pFsSf)^(pmoFD) = (pF) (pmo)^(pmo) = (pmo)

$$R \cap R' = R'' = \{r'' \mid r'' \in R \wedge r'' \in R'\}$$

- **Suma (union):**
  - Suma (*r*+*s*) dwóch relacji (*r*) i (*s*) jest sumą zbiorów dwóch relacji; jest relacją złożoną ze wszystkich podstawowych relacji wchodzących w skład (*r*) lub (*s*). Suma jest przemienna i łączna (associative).
  - przykład: (pmo)+(FDseS) = (pmoFDseS) (pFsSf)+(pmoFD) = (pmoFDsSf) (pmo)+(pmo) = (pmo)

Złożenie relacji podstawowych

	$\prec$	$\succ$	d	$\breve{d}$	o	$\breve{o}$	m	$\breve{m}$	s	$\breve{s}$	f	$\breve{f}$
$\prec$	$\prec$	B	$\prec\ o\ m\ d\ s$	$\prec$	$\prec$	$\prec\ o\ m\ d\ s$	$\prec$	$\prec\ o\ m\ d\ s$	$\prec$	$\prec$	$\prec\ o\ m\ d\ s$	$\prec$
$\succ$	B	$\succ$	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}\ d\ f$	$\succ$	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}\ d\ f$	$\succ$	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}\ d\ f$	$\succ$	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}\ d\ f$	$\succ$	$\succ$	$\succ$
d	$\prec$	$\succ$	d	B	$\prec\ o\ m\ d\ s$	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}\ d\ f$	$\prec$	$\succ$	d	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}\ d\ f$	d	$\prec\ o\ m\ d\ s$
$\breve{d}$	$\prec\ o\ m\ \breve{d}\ \breve{f}$	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}\ \breve{d}\ \breve{s}$	$B - \prec\ \succ\ m\ \breve{m}$	$\breve{d}$	$o\ \breve{d}\ \breve{f}$	$\breve{o}\ \breve{d}\ \breve{s}$	$o\ \breve{d}\ \breve{f}$	$\breve{o}\ \breve{d}\ \breve{s}$	$o\ \breve{d}\ \breve{f}$	$\breve{d}$	$\breve{o}\ \breve{d}\ \breve{s}$	$\breve{d}$
o	$\prec$	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}\ \breve{d}\ \breve{s}$	$o\ d\ s$	$\prec\ o\ m\ \breve{d}\ \breve{f}$	$\prec\ o\ m$	$B - \prec\ \succ\ m\ \breve{m}$	$\prec$	$\breve{o}\ \breve{d}\ \breve{s}$	o	$\breve{d}\ \breve{f}\ o$	$d\ s\ o$	$\prec\ o\ m$
$\breve{o}$	$\prec\ o\ m\ \breve{d}\ \breve{f}$	$\succ$	$\breve{o}\ d\ f$	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}\ \breve{d}\ \breve{s}$	$B - \prec\ \succ\ m\ \breve{m}$	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}$	$o\ \breve{d}\ \breve{f}$	$\succ$	$\breve{o}\ d\ f$	$\breve{o}\ \succ\ \breve{m}$	$\breve{o}$	$\breve{o}\ \breve{d}\ \breve{s}$
m	$\prec$	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}\ \breve{d}\ \breve{s}$	$o\ d\ s$	$\prec$	$\prec$	$o\ d\ s$	$\prec$	$f\ \breve{f}\ \equiv$	m	m	$d\ s\ o$	$\prec$
$\breve{m}$	$\prec\ o\ m\ \breve{d}\ \breve{f}$	$\succ$	$\breve{o}\ d\ f$	$\succ$	$\breve{o}\ d\ f$	$\succ$	$s\ \breve{s}\ \equiv$	$\succ$	$d\ f\ \breve{o}$	$\succ$	$\breve{m}$	$\breve{m}$
s	$\prec$	$\succ$	d	$\prec\ o\ m\ \breve{d}\ \breve{f}$	$\prec\ o\ m$	$\breve{o}\ d\ f$	$\prec$	$\breve{m}$	s	$s\ \breve{s}\ \equiv$	d	$\prec\ m\ o$
$\breve{s}$	$\prec\ o\ m\ \breve{d}\ \breve{f}$	$\succ$	$\breve{o}\ d\ f$	$\breve{d}$	$o\ \breve{d}\ \breve{f}$	$\breve{o}$	$o\ \breve{d}\ \breve{f}$	$\breve{m}$	$s\ \breve{s}\ \equiv$	$\breve{s}$	$\breve{o}$	$\breve{d}$
f	$\prec$	$\succ$	d	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}\ \breve{d}\ \breve{s}$	$o\ d\ s$	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}$	m	$\succ$	d	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}$	f	$f\ \breve{f}\ \equiv$
$\breve{f}$	$\prec$	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}\ \breve{d}\ \breve{s}$	$o\ d\ s$	$\breve{d}$	o	$\breve{o}\ \breve{d}\ \breve{s}$	m	$\breve{s}\ \breve{o}\ \breve{d}$	o	$\breve{d}$	$f\ \breve{f}\ \equiv$	$\breve{f}$

Złożenie relacji podstawowych

- W tabeli poniżej *full*=(pmoFDseSdfOMP) oraz *concur*=(oFDseSdfO)

.	p	m	o	F	D	s	e	S	d	f	O	M	P
p	(p)	(p)	(p)	(p)	(p)	(p)	(p)	(p)	(pmosd)	(pmosd)	(pmosd)	(pmosd)	*full*
m	(p)	(p)	(p)	(p)	(p)	(m)	(m)	(m)	(osd)	(osd)	(osd)	(Fef)	(DSOMP)
o	(p)	(p)	(pmo)	(pmo)	(pmoFD)	(o)	(o)	(oFD)	(osd)	(osd)	*concur*	(DSO)	(DSOMP)
F	(p)	(m)	(o)	(F)	(D)	(o)	(F)	(D)	(osd)	(Fef)	(DSO)	(DSO)	(DSOMP)
D	(pmoFD)	(oFD)	(oFD)	(D)	(D)	(oFD)	(D)	(D)	*concur*	(DSO)	(DSO)	(DSO)	(DSOMP)
s	(p)	(p)	(pmo)	(pmo)	(pmoFD)	(s)	(s)	(seS)	(d)	(d)	(dfO)	(M)	(P)
e	(p)	(m)	(o)	(F)	(D)	(s)	(e)	(S)	(d)	(f)	(O)	(M)	(P)
S	(pmoFD)	(oFD)	(oFD)	(D)	(D)	(seS)	(S)	(S)	(dfO)	(O)	(O)	(M)	(P)
d	(p)	(p)	(pmosd)	(pmosd)	*full*	(d)	(d)	(dfOMP)	(d)	(d)	(dfOMP)	(P)	(P)
f	(p)	(m)	(osd)	(Fef)	(DSOMP)	(d)	(f)	(OMP)	(d)	(f)	(OMP)	(P)	(P)
O	(pmoFD)	(oFD)	*concur*	(DSO)	(DSOMP)	(dfO)	(O)	(OMP)	(dfO)	(O)	(OMP)	(P)	(P)
M	(pmoFD)	(seS)	(dfO)	(M)	(P)	(dfO)	(M)	(P)	(dfO)	(M)	(P)	(P)	(P)
P	*full*	(dfOMP)	(dfOMP)	(P)	(P)	(dfOMP)	(P)	(P)	(dfOMP)	(P)	(P)	(P)	(P)

Obserwacje

- Używając tabeli składania i reguł dotyczących operacji na relacjach, możemy wydedukować nowe relacje pomiędzy interwałami.
- Jak jednak usystematyzować to podejście?
- Jakie będą koszty takiej systematyzacji?
- Czy jest ona zupełna?
- Jeśli nie, czy mogłaby być zupełna na podzbiorze systemu relacji?

CSP (*Constraint Satisfaction Problem)*

- Binarna relacja R nad dziedziną D jest zbiorem par elementów z dziedziny D, tzn., $R \subseteq D \times D$. Binarne ograniczenie xRy pomiędzy dwiema zmiennymi x oraz y ogranicza możliwe wartościowania x oraz y do par zawartych w relacji R.

- Problem CSP (*Constraint Satisfaction Problem*) składa się ze skończonego zbioru zmiennych V, dziedziny D z możliwymi wartościowaniami dla każdej zmiennej $v_i \in V$ i skończonego zbioru C ograniczeń (tj. relacji zachodzącymi pomiędzy wyróżnionymi zmiennymi zbioru V).

- Rozwiązaniem CSP jest wartościowanie każdej zmiennej $v_i \in V$ wartością $d_i \in D$ taką, że wszystkie ograniczenia C są spełnione, tzn. dla każdego ograniczenia $v_i R v_j \in C$ mamy $(d_i , d_j) \in R$. Jeśli CSP ma rozwiązanie, nazywane jest *consistent* lub *satisable*.

- W CSP ograniczenia mogą być definiowane extensjonalnie (przez zbiór dopuszczalnych lub niedopuszczalnych tuples) lub intensjonalnie (przez predykaty lub funkcje arytmetyczne).

Sieć ograniczeń algebry interwału

- Sieć *IA* jest siecią binarnych ograniczeń, gdzie:
  - zmiennymi są interwały,
  - binarnymi ograniczeniami pomiędzy zmiennymi są relacje występujące pomiędzy interwałami.
- Dziedziną jest zbiór uporządkowanych par liczb rzeczywistych (tj. interwałów)

$$D_i=\{(X^-, X^+) \mid (X^-, X^+) \in R, X^- < X^+\}$$

- Ograniczenia: 13 relacji podstawowych

$$C_{ij} \subseteq \{ p, m, o, s, d, f, P, M, O, S, D, F, e \}$$

- Rozwiązanie: przyporządkowanie każdej parze liczb takich wartości, że żadne z ograniczeń nie jest naruszone
- Oczywiście sieci temporalne mogą być przedstawiane jako problemy CSP.

Temporal CSP (*TCSP*)

- Rozwiązanie:
  - wyznaczenie spójnych etykiet singletonowych (*consistent singleton labellings*).
  - ograniczenie z „single disjunct” nazywane jest singleton.
  - etykietą singletonową to podstawowa relacja temporalna r, przyporządkowana parze zmiennych (v_i , v_j), $v_i , v_j \in V$, taka, że $r \subseteq C_{ij}$
  - r jest realizowalna dla pary, jeśli istnieje rozwiązanie z r zachodzącym dla tej pary. Realizowalność r dla (v_i , v_j) implikuje:
    - w przypadku jakościowym $r \in C_{ij}$
    - w przypadku ilościowym $r \subseteq C_{ij}$.
- TCSP skupia się na dwóch punktach:
  - określenia spójności, co jest bliskie zadaniu znalezienia jednego rozwiązania
  - znalezienia minimalnej reprezentacji, co w pewnym sensie odpowiada reprezentacji wszystkich rozwiązań
- Minimalne ograniczenie C^{min}_{ij} jest zbiorem realizowalnych relacji pomiędzy v_i , v_j.
- TCSP, gdzie wszystkie ograniczenia są minimalne nazywany jest minimalnym.

TCSP i lokalna k-spójność

- Wymuszenie lokalnej k-spójności ($k \leq n$)
  - Eliminacja nierealizowanych etykiet ze zbioru ograniczeń.
  - W większości przypadków da się to zrobić w wielomianowym czasie
    - spójność łuków - *arc-consistency*
    - spójność ścieżki - *path-consistency*)
- Spójność ścieżki jest mniej lokalna, gdyż obejmuje wszystkie ścieżki pomiędzy dwiema zmiennymi. Wiadomym jest, że wystarczy wymusić 3-spójność, aby zagwarantować spójność.

Spójność ścieżki CSP (*path-consistency*)

- Definiuje się jak następuje:
  - CSP jest *path-consistent* jeśli dla każdego wartościowania dwóch zmiennych v_i , $v_j \in V$, które spełnia $v_i R_{ij} v_j \in C$, istnieje takie wartościowanie dla każdej trzeciej zmiennej $v_k \in V$, że $v_i R_{ik} v_k \in C$ oraz $v_k R_{kj} v_j \in C$ są również spełnione. Formalnie: dla każdej trójki zmiennych v_i , v_j , $v_k \in V$:

$$\forall d_i, d_j : [(d_i, d_j) \in R_{ij} \rightarrow \exists d_k : ((d_i, d_k) \in R_{ik} \wedge (d_k, d_j) \in R_{kj})].$$

- Montanari zaproponował algorytm robiący CSP path-consistent, który został następnie uproszczony i nazwany *path-consistency algorithm* lub *enforcing path-consistency*. Algorytm ten eliminuje lokalnie niespójne tuples z relacji pomiędzy zmiennymi przez sukcesywne zastosowanie następującej operacji $R_{ij} := R_{ij} \wedge (R_{ik} . R_{kj})$ do wszystkich trójek zmiennych v_i , v_j , $v_k \in V$ aż do momentu osiągnięcia stanu ustalonego. Jeśli w wyniku zastosowania operacji osiągnięta zostaje relacja pusta, znaczy to, że CSP jest niespójny (*is inconsistent*). W przeciwnym przypadku CSP *is path-consistent*.

Spójność ścieżki (PC): rozwiązanie $O(n^5)$

- Niech R [i,j] jest tablicą rozmiaru $n \times n$ (n: liczba interwałów), w której zapisano wszystkie relacje występujące pomiędzy odpowiednimi interwałami.
- Algorytm PC:

```
Repeat
    Old := R;
    For each pair (i,j), 1 ≤ i,j ≤ n
      For each k, 1 ≤ k ≤ n
            R [i,j] := R [i,j] ^ (R [i,k] . R [k,j]);
Until Old = Tab;
```

- Algorytm kończy się, ale wymaga $O(n^5)$ przecięć i złożeń

Spójność ścieżki (PC): rozwiązanie $O(n^3)$

Algorytm PC:

1. Q := {(i, k, j), (i < j) and (k ≠ i, j)}
2. while Q ≠ {} do
3. select and delete a path (i, k, j) from Q
4. if R[i,i] ≠ R[i,k] . R[k,i] then
5. R[i,i] := R[i,i] ^ (R[i,k] . R[k,i])
6. if R[i,i] = {} then exit (inconsistency)
7. Q := Q ∪ {(i, j, k); (k, i, j) | 1 ≤ k ≤ n; i ≠ k ≠ j }
8. end-if
9. end-while
10. end-algorithm

Wnioskowanie w algebrze interwałów Allen'a

- Algorytm propagacji ograniczeń
  - spójność ścieżki (path consistency)
- Niezupełność

NP-trudność

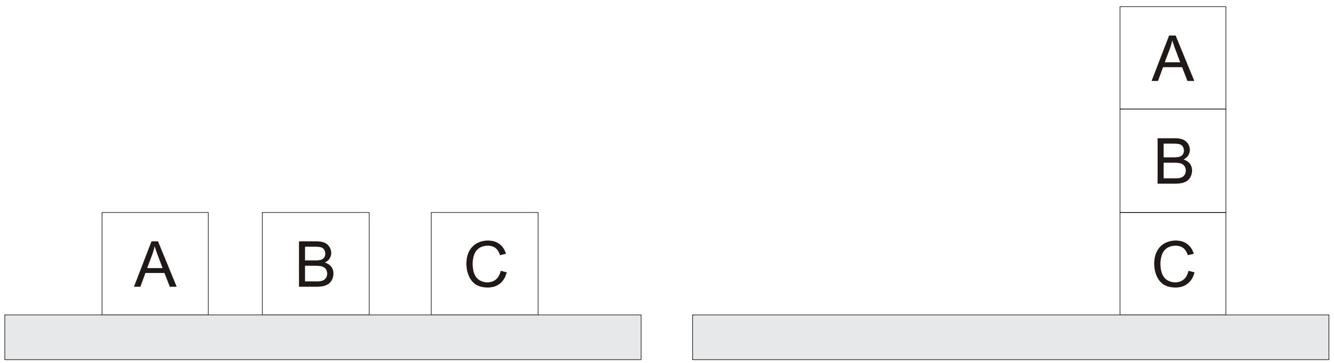
- Ciągła klasa punktów końcowych (The continuous endpoint class)
- Zupełność dla ciągłej klasy punktów końcowych (Completeness for the continuous endpoint class)

Planowanie w logice temporalnej

- Zadanie:

  wejście: jest stół, na którym leżą klocki A, B, C;

  wyjście: kolumna klocków (A na B, B na C), szukamy sekwencji akcji.
- Stany, akcje, własności:
  - Początek – stan początkowy
  - Wolny(K) – stan, w którym na klocku K nic nie leży
  - Koniec – stan końcowy
  - Na(K1, K2) – stan, w którym klocek K1 leży na klocku K2
  - Połóż(K1,K2) – akcja, której efektem jest Na(K1, K2); oczywiście aby akcja była możliwa, wcześniej musi być Wolny(K1) i Wolny(K2); mamy dwie tylko akcje: Połóż(A,B), Połóż(B,C).



Formalizacja

- Relacje początkowe:

  Początek (d) Wolny(A)

  Początek (d) Wolny(B)

  Początek (d) Wolny(C)

- Relacje końcowe:

  Koniec (d) Na(A,B)

  Koniec (d) Na(B,C)

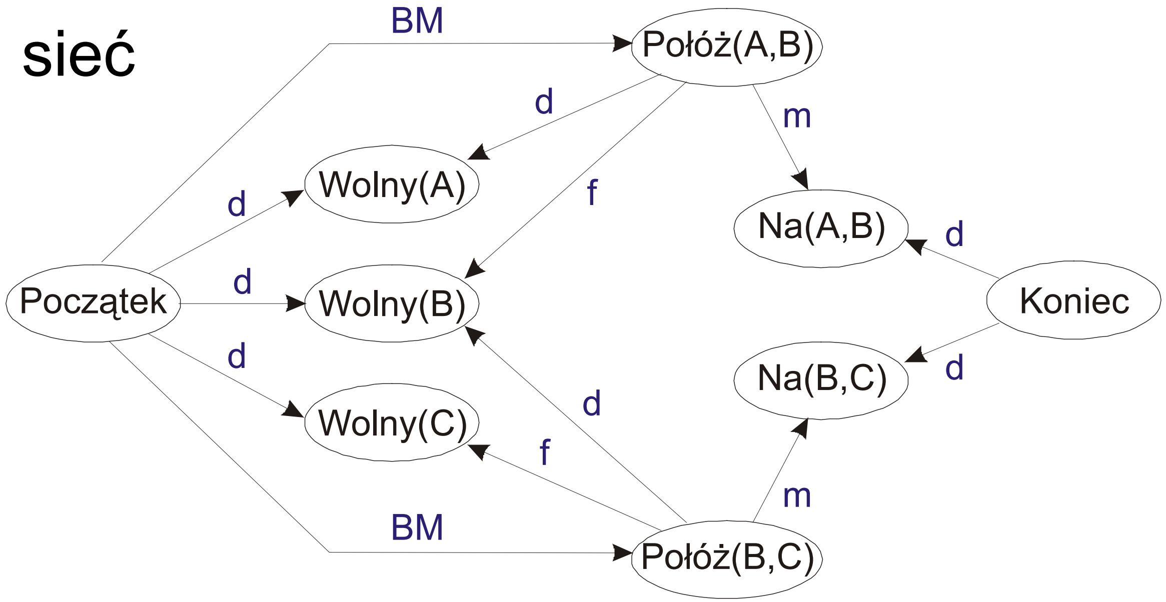
- Ograniczenia:

  Połóż(A,B) (BM) Początek
  Połóż(A,B) (d) Wolny(A)
  Stack(A,B) (f) Wolny(B)
  Stack(A,B) (m) Na(A,B)

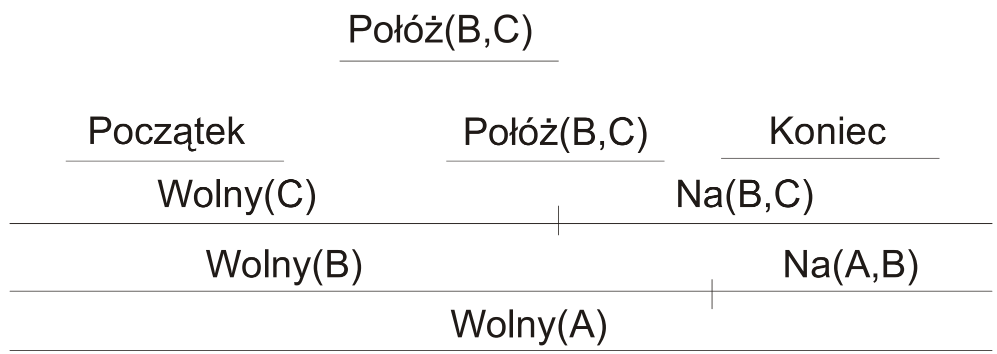
  Połóż(B,C) (BM) Początek
  Połóż(B,C) (d) Wolny(B)
  Połóż(B,C) (f) Wolny(C)
  Połóż(B,C) (m) Na(B,C)

Realizacja

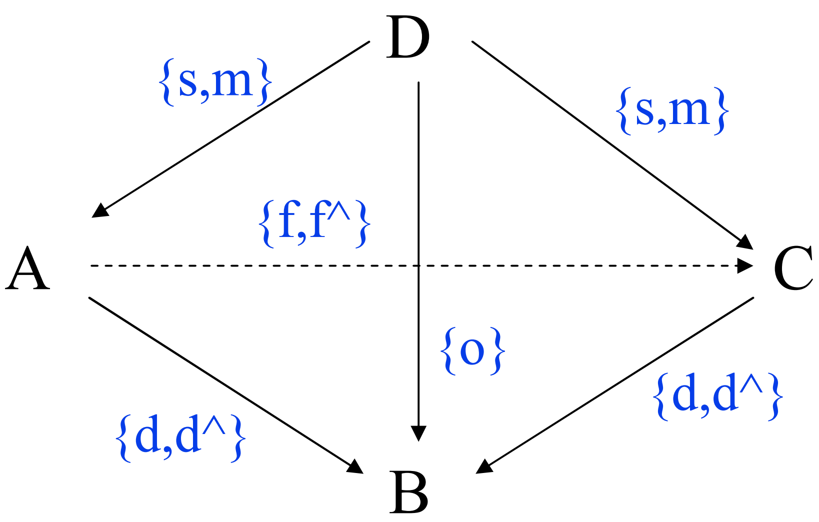
sieć

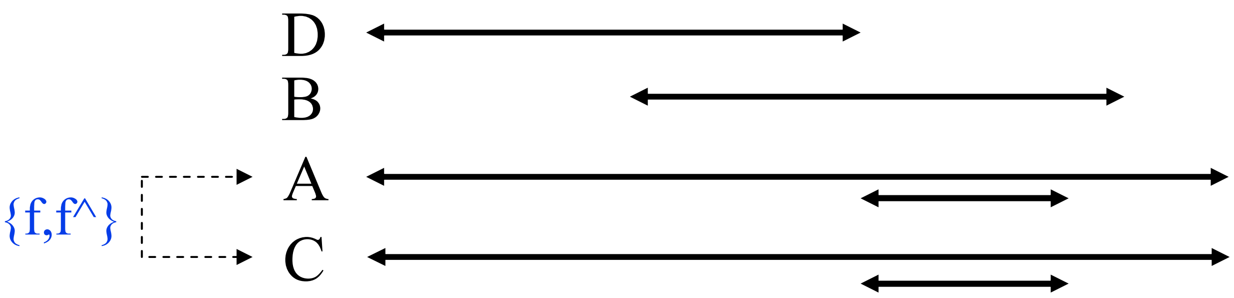


spójny scenariusz



Przykład niepełności





NP-trudność

- Twierdzenie (Kautz & Vilain):
  - Określenie spójności (CSP) w algebrze Allen'a jest NP-trudne

- Istnieją specjalne przypadki, które są łatwe (wielomianowe)
  - Zbiory relacji (podzbiory całego zbioru) dla których problem spójności jest łatwy

- Formuła interwałowa *X* ***r*** *Y* może być wyrażona jako klauzula nad atomami w postaci (*a* ***op*** *b*) gdzie
  - *a* i *b* są punktami końcowymi X^-, X^+, Y^-, Y^+
  - ***op*** $\in$ {<, >, =, ≤, ≥}

Algebra punktu [Vilain & Kautz 1986]

- Każda zmienna reprezentuje punkt czasu
- Dziedziną zmiennych jest zbiór liczb rzeczywistych
- Ograniczenia wyrażają względne położenie dwóch punktów
- Istnieją trzy podstawowe relacje:

  $\{<, >, =\}$
- Zbiór wszystkich możliwych relacji:

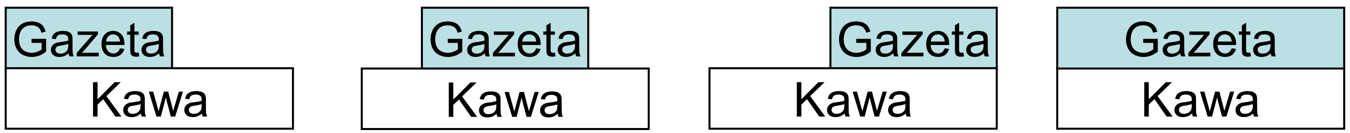
  $\{\emptyset, <, \leq, >, \geq, =, \neq\}$
- Mniejsze koszty niż w algebrze interwału:
  - zadania wnioskowania są wielomianowe $O(n^3)$
- Relacja pomiędzy dwoma punktami czasu może być dysjunkcją podstawowych relacji (informacja nieprecyzyjna)

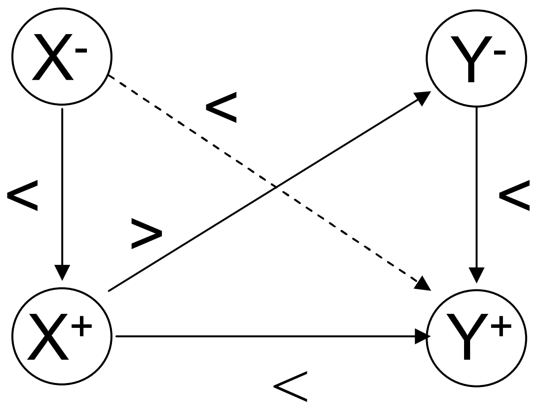
  $(A < B) \vee (A = B) \Leftrightarrow A \{<,=\} B$

Przykład

„Fred odłożył gazetę i dopił kawę”

- Algebra interwałów (IA): Gazeta { s, d, f, = } Kawa
- Algebra punktów (PA): Gazeta=[X^-, X^+], Kawa=[Y^-, Y^+]
  - Ograniczenia: $X^- < X^+$, $Y^- < Y^+$, $X^- < Y^+$, $X^- >= Y^-$, $X^+ <= Y^+$, $X^+ > Y^-$





Spójny scenariusz (consistent)

Tłumaczenia pomiędzy algebrami

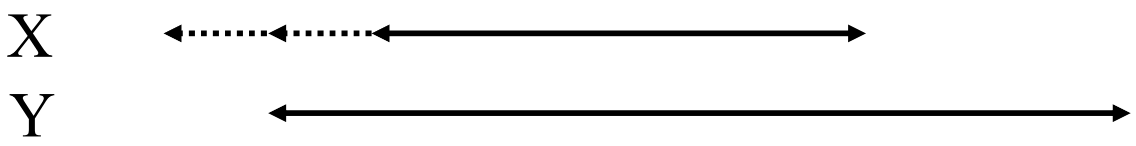
- Ograniczona klasa sieci *IA* (*SA*) może być przetłumaczona na sieć *PA* bez straty informacji
  - W sieciach *SA* dozwolone są relacje pomiędzy dwoma interwałami, które dotyczą tylko podzbiorów I, które mogą być przetłumaczone za pomocą relacji {$<$, $\leq$, $>$, $\geq$, $=$, $\neq$} na koniunkcję relacji pomiędzy końcami interwałów
  - Przykład: X(osd)Y można wyrazić jako koniunkcję relacji punktów $(X^- < X^+) \wedge (Y^- < Y^+) \wedge (X^+ > Y^-) \wedge (X^+ < Y^+)$

  - Dozwolone relacje SA stanowią mały, ale użyteczny podzbiór algebry Allen'a

Klasa punktów ciągłych

- **Klasa punktów ciągłych (Continuous Endpoint Class)** jest podzbiorem relacji Allen'a A takim, że
  - istnieje postać klauzulowa dla każdej relacji zawierająca tylko klauzule jednostkowe
  - $(a \neq b)$ jest **zabronione**
- **Przykład:** Wszystkie podstawowe relacje i {d,o,s}

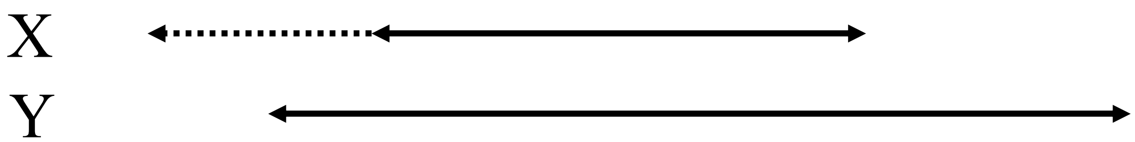
$$X\ (dos)\ Y \equiv \{X^- < X^+ ,\ Y^- < Y^+, \\ X^- < Y^+ ,\ X^+ > Y^-, \\ X^+ < Y^+\}$$



Klasa punktów ciągłych

- **Przykład:** Wszystkie podstawowe relacje oraz {d,o}

$$X \text{ (do) } Y \equiv \{X^- < X^+ ,\ Y^- < Y^+,$$
$$X^- < Y^+ ,\ X^+ > Y^-,\ X^- \neq Y^-$$
$$X^+ < Y^+\}$$



Tłumaczenia pomiędzy algebrami

- Co może być wyrażone w IA a nie może być wyrażone w SA to rozłączność interwałów

- Przykład:
  - relacja X(pP)Y wyrażona za pomocą relacji punktów:

$$((X^- < Y^-) \wedge (X^- < Y^+) \wedge (X^+ < Y^-) \wedge (X^+ < Y^+)) \vee ((X^- > Y^-) \wedge (X^- > Y^+) \wedge (X^+ > Y^-) \wedge (X^+ > Y^+))$$

  - najbliższa aproksymacja używająca tylko koniunkcji jest następująca:

$$(X^- \neq Y^-) \wedge (X^- \neq Y^+) \wedge (X^+ \neq Y^-) \wedge (X^+ \neq Y^+)$$

  co tłumaczy się na:

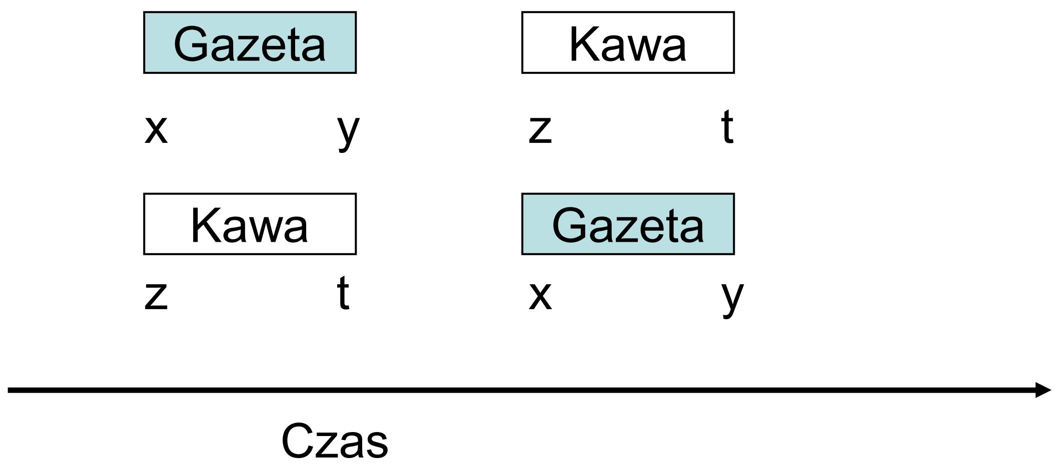
  X (pPoOdD) Y

  - oczywiście nie jest to ta sama relacja wyjściowa

Ograniczenia algebry punktu

- Istnieją przypadki, w których za pomocą PA nie można w pełni wyrazić wszystkich ograniczeń

- Przykład:
  - IA: Gazeta (ba) Kawa
  - PA: y<z oraz t<x nie mogą istnieć jednocześnie



Klasa punktów ciągłych

- Twierdzenie (van Beek):
  - CSP(*C*) and CMIN(*C*) są rozwiązane przez spójność ścieżki
  - Jeśli problem w CEC jest 3-spójny, wtedy jest on mocno *k*-spójny
- CMIN(*C*) może być obliczony w czasie O(n^3) używając algorytmu spójności ścieżki
  - *n* jest liczbą interwałów
- *C* zawiera 83 relacje
  - czy istnieje większe zbiory, takie, że spójność ścieżki oblicza CMIN ?
    - prawdopodobnie nie
  - czy istnieją większe zbiory, które pozwolą na wielomianowe testowanie spójności?
    - tak

Klasa ORD-Horn

- Klasa ***ORD-Horn*** *H* jest podzbiorem relacji Allen'a *A* która zezwala na postacie klauzulowe zawierające tylko klauzule Horna
  - dozwolone są tylko literały $(a \leq b)$, $(a = b)$, $(a \neq b)$
  - $(a > b)$ jest niedozwolona
- **Przykład:** Wszystkie R $\in$ P oraz (osF)

$$
\begin{aligned}
X\ (os)\ Y \equiv \{ & (X^- \leq X^+), (X^- \neq X^+), \\
& (Y^- \leq Y^+), (Y^- \neq Y^+), \\
& (X^- \leq Y^-), (X^- \leq Y^+), (X^- \neq Y^+), \\
& (Y^- \leq X^+), (X^+ \neq Y^-), (X^+ \leq Y^+), \\
& (X^- \neq Y^-) \vee (X^+ \neq Y^+)\}
\end{aligned}
$$

Podklasa ORD-Horn

- Twierdzenie:
  - CSAT(H) może być rozwiązany w wielomianowym czasie używając path consistency

- Zachodzi poniższy związek:
  - $C \subset P \subset H$
  - $|C|=83$, $|P|=188$, $|H|=868$

- Czy istnieją inne interesujące podklasy algebry Allen'a?
  - interesująca podklasa powinna zawierać wszystkie podstawowe relacje.
  - ORD-Horn jest (**only maximal tractable)** podklasą, która jest interesująca

Koniec